欧式实物期权定价模型及其应用

■扈文秀　甄士民

本文以欧式实物期权的执行价格的规律为切入点，寻求一种欧式实物期权的定价方法，以便在实践中作出更为合理、科学的决策。

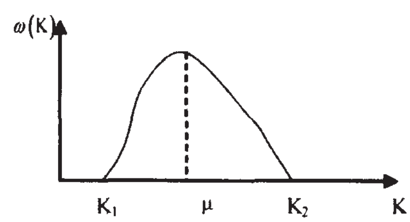
一、欧式实物期权中执行价格K的特性描述

在金融期权中，随着期权合同的签订，执行价格也就确定下来了。然而在欧式实物期权中，执行价格K是再投资的费用，它要在实物期权到期时才能确定。而且，执行价格K的大小要由投资者根据初期投资的经济效果来确定。所以执行价格K是一个随机变量，而不是一个随机过程。在当前的信息集下，它是一个不确定的信息。人们只知道执行价格的一个期望值，却不知道它究竟取期望值周围区间中的哪一个数值。于是先要得到执行价格K的分布规律，首先假定它为一个正态分布，即 $K\sim N(\mu,\sigma^2)$，这个假设是有其经济意义的。比如说，一个投资者根据前期投资的经济效果，决定投资1000万(期望值)左右，那么可以认为，$P\{K\in(1000\pm\Delta a)\}>P\{K\in(1000\pm\Delta b)\}$(其中 $\Delta a<\Delta b$)；另外，由数学上的中心极限定理 $P(\xi_n<x)\to\phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}dt$，$x\in R$，也可知许许多多偶然的因素共同作用的结果必然符合正态分布。

那么这里的两个参数 μ，σ 和区间范围 $[K_1,K_2]$ 怎么确定呢？在金融期权中，可以根据以往的大量历史数据来预测当期的这两个参数，还可以预测以后的参数取值。然而，实物期权及其标底资产的不可交易性使这些数据无法获得。实际上这就是信息经济学所谓的不完全信息状态。而实物期权方法认为:不完全信息产生了期权价值，而且不确定性越高,期权的价值就越大。在项目评价工作中常用的定量估计方法是主观估计法。主观估计法是专家根据长期积累的各方面经验及当时搜集的信息所做出的估计。为了减少偏差，可以采用德尔菲(Delphi)方法将众多专家的意见独立集中，利用信息反馈和信息控制的作用使专家观点集中于某一点来估计随机变量的概率分布。

在这里，进行再投资时，假定投资费用会有一个最低投资额 K_1 和最高投资额 K_2(如下图)。根据概率论中的有关知识，我们取 K_1 和 K_2 的中间值为 μ(当然这是一种乐观的方法)，由"3σ 法则"，即 $P(K\in(\mu\pm3\sigma))=97.7\%$，可以得出 σ。于是得到下列近似关系式：

$$\mu=\frac{K_1+K_2}{2}\qquad\sigma=\frac{(K_2-K_1)^2}{36}$$



二、执行价格不确定且为随机变量时欧式实物期权定价模型的提出

我们知道，股票价格的变化服从对数正态分布，即

$1nS_T\sim N[1nS_0+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t),\sigma\sqrt{T-t}]$，设其密度函数为 $\varphi(S_T)$。

由前文可知，执行价格 $K\sim N\left(\frac{K_1+K_2}{2},\frac{(K_2-K_1)^2}{36}\right)$，设其密度函数为 $\omega(K)$。

这里我们假设K和 S_T 的联合密度函数是 $\Omega(K,S_T)$，如果K和 S_T 是独立分布，它们的联合密度函数就为 $\Omega(K,S_T)=\varphi(S_T)\omega(K)$。

在一个风险中性的世界里，可以得知实物期权的价值等于到期日期权价值以无风险利率折现的数值，也就是：

$$c=e^{-r_f(T-t)}E^*[\max(S_T-K,0)]$$

于是有 $c=e^{-r_f(T-t)}E^*(ST-K)+0$

$$=e^{-r_f(T-t)}\int_{K_1}^{K_2}\int_{K}^{\infty}(S_T-K)\varphi(S_T)\omega(K)dS_TdK$$

$$=e^{-r_f(T-t)}\int_{K_1}^{K_2}\omega(K)dK\int_{K}^{\infty}(S_T-K)\varphi(S_T)dS_T$$

根据B-S公式，我们可知

$$e^{-r_f}(T-t)\int_{K}^{\infty}(S_T-K)\varphi(S_T)dS_T$$

$$=e^{-r_f(T-t)}[S(t)N(d_1)e^{r_f(T-t)}-KN(d_2)]$$

于是我们就得到了执行价格处于不完全信息状态且为随机变量时的B-S公式：

$$c=e^{-r_f(T-t)}\int_{K_1}^{K_2}[PN(d_1)e^{r_f(T-t)}-KN(d_2)]\omega(K)dK$$

$$d_1=\frac{\ln(P/x)+[r_f+\frac{\sigma^2}{2}](T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

$$\omega(K)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(K-\mu)^2}{2\sigma^{*2}}}$$

$$\mu=\frac{K_1+K_2}{2}\qquad\sigma^{*2}=\frac{(K_2-K_1)^2}{36}$$

这里，$N(x)$ 为标准正态分布的累计概率分布函数(即 $N(x)=P(\xi<x$，ξ 为标准正态随机变量)；c是项目的欧式看涨期权价格；P为项目现金流收益的现值；K为项目的投资费用；T为项目投资机会的持续时间；r_f 为无风险利率且为常数；σ 为项目收益的不确定性。

三、不确定执行价格下的欧式实物期权定价模型在投资中的应用

某企业为了满足消费者新的需求，巩固并扩大自己的市场份额，欲建立一个新的投资项目来推出新产品，这个投资机会的持续时间为两年，未来收益现金流的现值为110万元，通过专家打分，可知投资上限和下限分别为150万元和50万元。假设无风险利率为10%，标的资产波动率为0.1。那么该投资项目的相当于欧式期权的期权价值是多少呢？

引入期权理论，两年后的再投资机会可看成是公司购买的看涨期权，可知该公司两年后用新增的投资额挣得之后的现值为110万元的现金流量。这一机会是由最初的投资创造，最初的投资为把握市场机会和新增投资创造了生产、

基金项目：国家自然科学基金资助项目(70371021)；西安理工大学科技创新基金资助项目(107-210302)

线性最优路径相关奖惩系统研究

■王奕渲　周叔子

奖惩系统也叫无赔款优待，是汽车保险中使用最广泛的费率模式。其原理是每位投保人的每年更新保费与其在以往保单年度的索赔纪录有关。

当奖惩系统的转移规则只与当前费率等级和上一保单年度的索赔次数有关时，称之为路径无关奖惩系统；而当转移规则还与其在以往多个保单年度的索赔次数有关时，称它是路径相关的。对于路径无关的奖惩系统，Lemaire 等分别在一定的目标和约束下构建最优奖惩系统，即对于一个封闭的保单组合来说，保险人的年总保费将保持不变，或任意选取投保人的期望保费保持不变且等于保单组合的平均保费。在最小化保险人损失的目标下，Gilde 及 Sundt 利用马尔可夫链理论得到了路径无关奖惩系统最优费率等级。

本文的目的是分别在最小化保险人损失和最大化保险人效益的目标下，对路径相关转移规则的奖惩系统进行研究，并构建一个最小化保险人总损失的线性最优奖惩系统，即具有线性奖惩系数（保费）——奖惩系数（保费）是奖惩等级的线性函数。

一、记号和假设

S 为原转移规则下的奖惩等级数，$i^{(0)}$ 为初始等级；

i_m 为新规则下的状态，其中 $i=1,\Lambda,s$，$m=1,\Lambda,n_i$，且至少存在一个 $n_i>1$；

$K=\sum_{i=1}^{s} n_i$ 为细分后的马氏链的状态数或等级数；

$BP(i_m)$为奖惩等级 i_m 或 i 的纯保费，显然，对于任意给定的 $i=1,\Lambda,s$，$BP(i_m)$相同，$m=1,\Lambda,n_i$；

$BF(i_m)$为奖惩等级 i_m 或 i 的奖惩系数，同样的，对给定的 $i=1,\Lambda,s$，$BF(i_m)$相同，$m=1,\Lambda,n_i$，若取初始等级奖惩系数等于 100%，则 $BF(i)=\frac{BP(i)}{BP(i^{(0)})}\times 100\%$；

A 为保单持有人的年索赔次数随机变量，其分布函数为 $F(\lambda)$；

X 为索赔金额随机变量，本文假设每次的索赔金额是独立同分布的并与索赔次数相互独立，因此本文不妨假设其期望等于 1；

T 是一个 $K\times K$ 的状态转移矩阵，元素 $T(i_m,j_p)$为从状态 i_m 经一步后到达状态 j_q 所需的索赔次数；

$P_{T,\lambda}^{(n)}=\left(P_{T,\lambda}^{(n)}(i_m,j_q)\right)_{K\times K}$ 为在给定 $\Lambda=\lambda$ 的条件下的 n 步概率转移矩阵，其中 $P_{T,\lambda}^{(n)}(i_m,j_q)$等于从等级 i_m 出发 n 年后到达等级 j_q 的概率；

$P_{\lambda}^{(n)}=\left(P_{\lambda}^{(n)}(i_m)\right)$，若所有的保单均从初始等级 $i^{(0)}$开始，那么 $P_{\lambda}^{(n)}(i_m)$为 n 个连续保险期间后到达等级 i_m 的条件概率；

$P_{\lambda}=\lim_{n\to\infty} P_{\lambda}^{(n)}=(P_{\lambda}(i_m))$为从初始等级 $i^{(0)}$ 出发的条件平稳概率分布；

$P=\lim_{n\to\infty} P^{(n)}=(P(i_m))$为从初始等级出发的非条件平稳概率分布，显然：

$$p(i_m)=\int_{\lambda} p_{\lambda}(i_m)\,dF(\lambda),\ i=1,\Lambda,s,\ m=1,\Lambda,n_i。$$

二、最小平方误差损失函数下的线性最优奖惩系统

由于索赔金额为独立同分布随机变量且与索赔次数相互独立，在 $E[x]=1$ 的假设下，如果不考虑费用因素，一个有着索赔频率的保单持有人给保险人造成的损失等于 $\lambda-BP(z)$，其中 z 为该投保人的当前奖惩等级，显然是一个随机变量，它的值与投保人的以往索赔记录有关。当保险人的目标是最小化损失时，最常用的损失函数是平方误差损失函数，即 $L=E_{\Lambda}[\Lambda-BP(z)]^2$。

命题 1　若假设索赔次数与索赔金额相互独立且 $E[x]=1$，保险人最小化平

技术、经营的准备。按照期权定价公式，新增的投资额相当于期权的执行价格 K；未来的净现金流量在今天的现值 110 万元相当于标的资产在期初时的价格 S；期权期限为 T=2 年；无风险利率 r_f 为 10%；标的资产波动率 ó=0.1。

将以上数据代入上述实物期权公式，经过整理得到：

$$c=\frac{3}{50\sqrt{2\pi}}e^{-0.2}\int_{50}^{150}[110N(d_1)e^{0.2}-KN(d_2)]\,e^{-\frac{9(K-100)^2}{5000}}\,dK$$

其中，$d_1=51n\left(\frac{100}{K}\right)+1.05$；$d_2=51n\left(\frac{100}{K}\right)+0.85$

可以看出，我们很难把这个一重积分计算出来。但是笔者认为可以通过差分法借助于 Matlab 数学软件求出此积分的近似解。其基本思想为：利用数学积分的思想，以很小很小的步长（0.01）来分割被积函数曲线，然后累积求和，最终得出近似解。详细过程和编程略。最终的计算结果为 25.28 万元。

四、结束语

传统的实物期权定价模型中将执行价格视为常数或者某一特定的随机过程，此种执行价格的假定同欧式实物期权的执行价格的特性不相符合，因而传统的实物期权定价模型也就无法准确确定出欧式实物期权的价值。本文基于此，以欧式实物期权的执行价格的特性为切入点，考虑信息效应对执行价格的影响，建立了欧式实物期权的定价模型，并用实际案例说明了此模型的运用。通过对传统的实物期权定价模型进行修正，使得实物期权定价方法更加符合投资决策实践，以便合理评价投资机会的价值。

诚然，此模型运用效果还有待在实践中进一步检验，这也是实物期权定价方法研究所共同面临的问题。希望后续学者对此模型的假设条件进一步放松和对模型进行修正。

（作者单位/西安理工大学工商管理学院）

（责任编辑/亦　民）